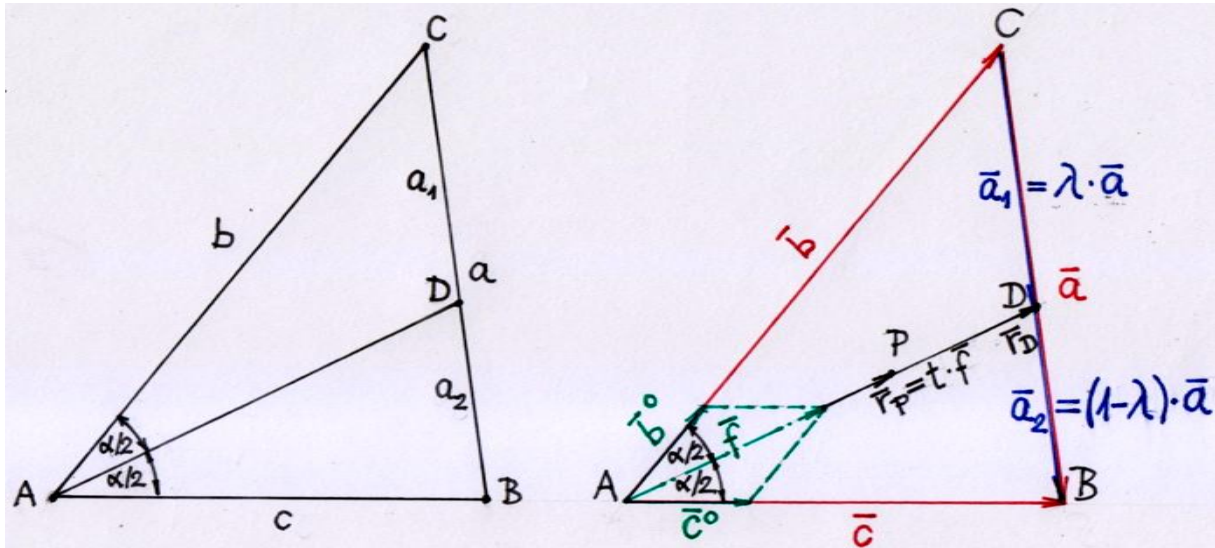


A szögfelezőtétel vektoros igazolása

Az [1] munkát nézegetve találkoztunk a címbeli feladattal. Itt e feladat megoldásának saját változatát mutatjuk be. Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

A szögfelezőtétel így szól – [2] – :

A háromszög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja fel.

Az 1. ábra jelöléseivel:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b}{c} .}$$

(T)

Igazolása az alábbiak szerint történhet.

Az **ABC** háromszög **A** csúcsánál lévő α szögét felező **AD** egyenes egy tetszőleges **P** pontjának $\mathbf{r}_P$ helyvektora:

$$\mathbf{r}_P = t \cdot \mathbf{f} = t \cdot (\mathbf{b}^0 + \mathbf{c}^0) = t \cdot \left(\frac{\mathbf{b}}{b} + \frac{\mathbf{c}}{c} \right) , \quad -\infty < t < \infty ; \quad (1)$$

itt $\mathbf{b}^0$ és $\mathbf{c}^0$ a **b** és **c** oldalak menti egységvektorok, továbbá az oldalak hosszára:

$$a = |\mathbf{a}| , \quad b = |\mathbf{b}| , \quad c = |\mathbf{c}| . \quad (2)$$

A szögfelező egyenes és a felezett α szöggel szemközti oldal **D** metszéspontjára, (1) - gyel is:

$$\mathbf{r}_D = t_0 \cdot \mathbf{f} = t_0 \cdot \left(\frac{\mathbf{b}}{b} + \frac{\mathbf{c}}{c} \right) . \quad (3)$$

Most az 1. ábra jobb oldali része alapján:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}; \quad (4)$$

majd:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \quad (5)$$

emiatt is:

$$\mathbf{a}_1 = \lambda \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}_2 = (1 - \lambda) \cdot \mathbf{a}. \quad (6)$$

Másfelől a 2. ábra szerint, (4) és (6) - tal is:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_D &= \mathbf{b} + \mathbf{a}_1 = \mathbf{b} + \lambda \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} + \lambda \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = (1 - \lambda) \cdot \mathbf{b} + \lambda \cdot \mathbf{c}, \quad \text{tehát:} \\ \mathbf{r}_D &= (1 - \lambda) \cdot \mathbf{b} + \lambda \cdot \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (7)$$

Most (3) és (7) - tel:

$$\begin{aligned} t_0 \cdot \left(\frac{\mathbf{b}}{b} + \frac{\mathbf{c}}{c} \right) &= (1 - \lambda) \cdot \mathbf{b} + \lambda \cdot \mathbf{c}, \\ t_0 \cdot \frac{\mathbf{b}}{b} + t_0 \cdot \frac{\mathbf{c}}{c} &= (1 - \lambda) \cdot \mathbf{b} + \lambda \cdot \mathbf{c}, \quad \text{innen:} \\ t_0 \cdot \frac{1}{b} &= 1 - \lambda, \quad t_0 \cdot \frac{1}{c} = \lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

Felhasználva, hogy:

$$(1 - \lambda) + \lambda = 1, \quad (9)$$

(8) és (9) - cel:

$$t_0 \cdot \frac{1}{b} + t_0 \cdot \frac{1}{c} = 1 \rightarrow t_0 \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 \rightarrow t_0 \cdot \frac{b+c}{b \cdot c} = 1 \rightarrow \underline{t_0 = \frac{b \cdot c}{b+c}}. \quad (10)$$

Most (8) és (10) szerint:

$$\lambda = t_0 \cdot \frac{1}{c} = \frac{b}{b+c}, \quad 1 - \lambda = t_0 \cdot \frac{1}{b} = \frac{c}{b+c}. \quad (11)$$

Majd (6) és (11) szerint:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{b}{b+c} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{c}{b+c} \cdot \mathbf{a}; \quad (12)$$

minthogy:

$$a_1 = |\mathbf{a}_1|, \quad a_2 = |\mathbf{a}_2|, \quad (13)$$

így (2 / 1), (12) és (13) - mal:

$$a_1 = \frac{b}{b+c} \cdot a, \quad a_2 = \frac{c}{b+c} \cdot a; \quad (14)$$

(14) -ből hányadosképzéssel:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{b}{b+c} \cdot a}{\frac{c}{b+c} \cdot a} = \frac{b}{c}, \quad \text{tehát:}$$

$$\underline{\underline{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b}{c}}}, \quad (15)$$

egyezésben (T) - vel. Ezzel az igazolást befejeztük.

Megjegyzések:

M1. A [2] munkában a tétel igazolása területekkel történik.

M2. Vektoros megoldással találkoztunk [3] - ban is, mely az [1] - ben látotthoz hasonló.

M3. Itt csak a háromszög belső szögének felezőjével foglalkoztunk.

M4. Gyakorlás / ismétlés gyanánt számítsuk ki az **AD** szögfelező szakasz **s** hosszát is!

Az 1. ábra szerint, (1) és (3) - mal is:

$$\overline{AD} = s = |\mathbf{r_D}| = \sqrt{\mathbf{r_D}^2} \rightarrow s^2 = \mathbf{r_D}^2 = t_0^2 \cdot (\mathbf{b}^0 + \mathbf{c}^0)^2,$$

$$s^2 = t_0^2 \cdot [(\mathbf{b}^0)^2 + 2 \cdot \mathbf{b}^0 \cdot \mathbf{c}^0 + (\mathbf{c}^0)^2] = t_0^2 \cdot (2 + 2 \cdot \cos \alpha), \quad \text{tehát:}$$

$$s^2 = t_0^2 \cdot (2 + 2 \cdot \cos \alpha). \quad (16)$$

Most az 1. ábra alapján koszinusztétellel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \rightarrow 2 \cdot \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b \cdot c}. \quad (17)$$

Majd (10), (16) és (17) - tel:

$$s^2 = \frac{b^2 \cdot c^2}{(b+c)^2} \cdot \left(2 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b \cdot c} \right) = \frac{b^2 \cdot c^2}{(b+c)^2} \cdot \frac{2 \cdot b \cdot c + b^2 + c^2 - a^2}{b \cdot c} = b \cdot c \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}, \quad \text{innen:}$$

$$\underline{\underline{s = \frac{\sqrt{b \cdot c \cdot [(b+c)^2 - a^2]}}{b+c}}}. \quad (18)$$

A (18) képlet egyezik [4] - beli megfelelőjével.

Források:

- [1] – **C. E. Weatherburn**: Elementary Vector Analysis
G. Bell and Sons, Ltd., London, 1921.
- [2] – **Reiman István**: Matematika
Typotex Kiadó, Budapest, 2011.
- [3] – **Reiman István**: A geometria és határterületei
Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.
- [4] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev**: Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Szödliget, 2019. 11. 10.